NGUYÊN LÝ DIRICHLET NÂNG CAO

KIẾN THỨC BỔ SUNG

1. Một số nguyên dương n thì có n số dư: 0, 1, 2, 3, ..., n-1.
2. Nếu a và b có cùng số dư khi chia cho m thì (a – b) ⋮ m
3. Nếu a và b khi chia cho m, mà tổng số dư của hai số đó chia hết cho m thì (a + b) ⋮ m

CHỮA BÀI TUẦN TRƯỚC

Bài 12. Có 5 đội bóng thi đấu với nhau mỗi đội phải đấu một trận với các đội khác. Chứng minh rằng vào bất cứ lúc nào cũng có hai đội đã đấu số trận như nhau.

Lời giải

Ta thấy vào bất cứ lúc nào mỗi đổi đấu có thể ít nhất là 0 trận, đấu nhiều nhất là 4 trận. Tuy nhiên không thể tồn tại 1 đội đấu 0 trận (tức là chưa đấu) và 1 đội khác lại đấu 4 trận (tức là đấu hết với các đội còn lại).

Trường hợp 1. Nếu có đội chưa đấu thì đội đấu nhiều nhất có thể là 3 trận.

Do đó có 5 đội bóng mà mỗi đội chỉ có thể đấu 0, 1, 2, 3 trận (4 khả năng).

Theo *nguyên lý Đirrichle, tồn tại hai đội đã đấu số trận như nhau.*

Trường hợp 2. Nếu đội nào cũng đấu thì đội đấu nhiều nhất có thể là 4 trận.

Do đó có 5 đội bóng mà mỗi đội chỉ có thể đấu 1, 2, 3, 4 trận (4 khả năng).

Theo *nguyên lý Đirrichle, tồn tại hai đội đã đấu số trận như nhau.*

Nhận xét. Điểm khó của bài là phải xét 2 trường hợp để luôn luôn có 4 khả năng *(4 cái lồng)*. Do vậy cần đọc kỹ đề bài để xét trường hợp.

Bài 14. Chứng minh rằng từ 52 số nguyên bất kỳ luôn có thể chọn ra hai số mà tổng hoặc hiệu của chúng chia hết cho 100.

Lời giải

Xét các cặp số (1;99), (2;98); (3;97),..., (49;51), (0; 0) , (50, 50) như vậy ta có 51 cặp số. Mà đề bài cho 52 số nguyên bất kỳ khi chia cho 100 ta nhận được 100 số dư: 0, 1, 2, 3, 4, ..., 99. Theo *nguyên lý Đirrichle, tồn tại hai số dư thuộc cùng một cặp*.Xét hai số có hai số dư ấy:

- Nếu hai số dư bằng nhau thì hiệu hai số đó chia hết cho 100.
- Nếu hai số dư khác nhau thì tổng hai số đó chia hết cho 100.

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Nhận xét.Do đề bài chứng minh hai số mà tổng hoặc hiệu chia hết cho 100. Do vậy chúng ta nghĩ tới việc hai số dư bằng nhau hoặc tổng hai số dư bằng 100.

Bài 15. Chứng minh rằng trong các số tự nhiên thế nào cũng có k số sao cho $2021^k - 1$ chia hết cho 10^5.

Lời giải

Xét 10^5 số : 2021^1 , 2021^2 , 2021^3 ,2021^4 ,.... , 2021^{10^5} . Các số này đều không chia hết cho 10^5. Ta có 10^5 số khi chia cho 10^5 mà chỉ nhận $10^5 - 1$ số dư: 1,2,3,4, ..., 10^5-1. Do vậy phải tồn tại hai số có cùng số dư, giả sử đó là 2021^n và 2021^m (n > m) , suy ra $2021^n - 2021^m \,\vdots\, 10^5 \Rightarrow 2021^n(2021^{n-m} - 1) \,\vdots\, 10^5 \Rightarrow 2021^{n-m} - 1 \,\vdots\, 10^5$

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 16. Có 15 đội bóng tham dự giải vô địch quốc gia theo thể thức đấu vòng tròn một lượt. Chứng minh rằng tại bất kì thời điểm nào của giải ta luôn tìm được 2 đội có cùng số trận đấu bằng nhau tại thời điểm đó (có thể là 0 trận).

Bài 17. Chứng minh rằng trong các số tự nhiên thế nào cũng có k số sao cho $21^k - 1$ chia hết cho 1000.

Bài 18. Chứng minh rằng tồn tại số có dạng 20212021 …. 202100…0 chia hết cho 2020

Bài 19. Chứng minh rằng tồn tại 1 số tự nhiên, tất cả các chữ số bằng 1, chia hết cho 2021.

Bài 20. Chứng minh rằng trong số 100 số tự nhiên tuỳ ý bao giờ ta cũng chọn được 15 số mà hiệu của 2 số bất kì trong 15 số ấy chia hết cho 4.

Bài 21. Chứng minh rằng trong 6 số tự nhiên bất kì ta cũng tìm được 2 số mà hiệu của chúng chia hết cho 5.

Bài 22. Chứng minh rằng trong 5 số nguyên bất kỳ bao giờ cũng có một số chia hết cho 5 hoặc tổng của một nhóm các số trong 5 số đó chia hết cho 5.

Bài 23. Chứng minh rằng trong 7 số tự nhiên bất kì ta cũng tìm được 3 số mà tổng của chúng chia hết cho 3

Bài 24. Cho 5 số tự nhiên bất kỳ, chứng minh rằng tồn tại 3 số có tổng chia hết cho 53.

Bài 25. Trong mỗi ô bàn cờ kích thước 5x5 có một con bọ dừa. Vào một thời điểm nào đó tất cả các con bọ dừa bò sang ô bên cạnh (ngang hoặc dọc). Có thể khẳng định rằng sau khi các con bọ dừa di chuyển sẽ luôn có ít nhất một ô trong bàn cờ không có con bọ dừa nào trong đó không?

Bài 26. Có 25 số tự nhiên có 4 chữ số và đươc lập nên từ các chữ số 1,2,3 và 4. Chứng tỏ rằng ta có thể tìm thấy trong 25 số ấy hai số bằng nhau

Bài 27. Bốn lớp 6A, 6B, 6C, 6D có tất cả 44 học sinh giỏi, trong đó số học sinh giỏi của lớp 6D không quá 10 người. Chứng minh rằng ít nhất một trong 3 lớp 6A, 6B, 6C có số học sinh giỏi từ 12 em trở lên

Bài 28. Trong 1 lớp học có 35 học sinh. Chứng tỏ rằng trong số học sinh ta sẽ tìm thấy 2 học sinh có tên bắt đầu bằng một chữ cái giống nhau.

Bài 29. Cho bảng ô vuông 5×5. Mỗi ô trong bảng, chúng ta ghi một trong các số 1; 0; - 1. Hỏi có thể điền được các số sau cho tổng mỗi hàng, mỗi đường chéo, mỗi cột dọc là khác nhau được hay không?

Bài 30. Cho 6 nhà khoa học, mỗi nhà khoa học viết thư cho các nhà khoa học khác về một trong hai đề tài: *Hạt nhân* hoặc *Viruts Covid- 19* . Chứng minh rằng tồn tại 3 nhà khoa học viết thư trao đổi về cùng một đề tài.